

Exercices – Séquence n° 11 – FONCTIONS (IV) :

fonction logarithme népérien

Contenus	- Fonction logarithme népérien, notée $\ln$, construite comme fonction réciproque de la fonction exponentielle. - Propriétés algébriques du logarithme. - Fonction dérivée du logarithme, variations. - Limites en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. - Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle. - Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.
Capacités	- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation. - Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme. - Exemple d'algorithme : algorithme de Briggs pour le calcul du logarithme.

COMPÉTENCES :

Ch : CHERCHER	Mo : MODÉLISER	Re : REPRÉSENTER	Ra : RAISONNER	Ca : CALCULER	Co : COMMUNIQUER
----------------------	-----------------------	-------------------------	-----------------------	----------------------	-------------------------

Exercice 1 [Ca-Ra-Co]

La température θ (en $^{\circ}\text{C}$) d'un liquide peut être modélisée en fonction du temps t , en minutes, par :

$$\theta(t) = 25 - 10 e^{0,1t}$$

- Quelle est la température initiale du liquide ?
- Au bout de combien de temps la température atteindra-t-elle : a. $12,5^{\circ}\text{C}$? b. 0°C ?

Exercice 2 [Ca]

- Simplifier les nombres suivants.

$$\begin{aligned} A &= \ln(e^2) & ; & & B &= \ln(e^{-3}) & ; & & C &= e^{\ln(6)} & ; & & D &= e^{2\ln(7)} \\ E &= e^{\ln(2)+\ln(3)} & ; & & F &= e^{-\ln(2)} & ; & & G &= e^{\ln(3)} + e^{-\ln(6)} & ; & & H &= \frac{e^{1+\ln(2)}}{e^{1+\ln(3)}} \end{aligned}$$

- Écrire les nombres suivants en fonction de $\ln(3)$.

$$I = \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) ; J = \ln\left(\frac{1}{9}\right) ; K = \ln(63) - \ln(7) ; L = \ln(81) ; M = \ln(\sqrt{27}) ; N = \ln(\sqrt{3}) - \frac{1}{3}\ln(9)$$

- Écrire les nombres suivants plus simplement sous la forme $\ln(a)$ où a est un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} P &= \ln(14) - \ln(7) & ; & & Q &= \ln\left(\frac{5}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{5}\right) & ; & & R &= \frac{\ln(100)}{\ln(10)} \\ S &= \ln(8) - \ln(12) + \ln(3) + \ln(2) & ; & & T &= \ln(10\,000) + \ln(0,01) & ; & & U &= \ln(3 - 2\sqrt{2}) + \ln(3 + 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Exercice 3 [Ca-Ra]

- Démontrer que, pour tout réel x , $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.
- Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $\ln(2x + 3) + \ln(x^3) - 6\ln(\sqrt{x}) = \ln(x) + \ln\left(2 + \frac{3}{x}\right)$.
- Déterminer l'ensemble E tel que, pour tout $x \in E$, $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$.

Exercice 4 [Ch-Mo-Ra-Ca-Co]

Les deux problèmes suivants sont indépendants.

- **Problème 1 :** (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_1 = 3$ et de raison 1,5.
À partir de quel rang n la somme des n premiers termes de la suite (v_n) est-elle supérieure à 10^5 ?
- **Problème 2 :** On lance n fois un dé cubique équilibré et on compte le nombre de six obtenus.
Quel est le nombre minimum de lancers pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à 0,99 ?

Exercice 5 [Ca-Ra]

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

- 1) Montrer que 3 est une racine de $P(x)$.
- 2) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x , $P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$.
- 3) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
- 4) En déduire les solutions réelles des deux équations suivantes :
(E₁) : $(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 4 \ln x + 12 = 0$ et (E₂) : $e^{2x} - 3e^x - 4 + 12e^{-x} = 0$.

Exercice 6 [Ra-Mo]

Au loto, la probabilité d'obtenir le plus gros gain lors d'un tirage est $\frac{1}{19\,068\,840}$.

- 1) Combien de fois au minimum faut-il jouer au loto pour avoir au moins 1% de chance de gagner au moins une fois le plus gros gain ?
- 2) A raison de trois tirages hebdomadaires, combien d'années faudrait-il jouer pour avoir au moins 1% de chance de gagner au moins une fois le plus gros gain ?

Exercice 7 [Mo-Ca-Ra-Ch]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

- 1) On considère la fonction ci-contre écrite en langage Python :
 - a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat renvoyé lorsqu'on saisit `terme(3)` dans une console d'exécution Python.
 - b. Expliquer le rôle de cette fonction Python.
 - c. Le tableau suivant donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cette fonction Python pour certaines valeurs de n . Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

```
def terme(n):
    u=1
    for i in range(n):
        u=sqrt(2*u)
    return u
```

n	0	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

- 2)
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < u_{n+1} \leq 2$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 3) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln(u_n) - \ln 2$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.
 - b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n .
 - c. Déterminer alors la limite de la suite (u_n) .
 - d. Écrire une fonction Python qui détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 1,999$.
 - e. Déterminer algébriquement cette valeur.
- 4) Dans cette question, on étudie le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0 .
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.
Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2024$ alors, la suite (u_n) est croissante. »
Affirmation 2 : « Si $u_0 = \sqrt{2}$ alors, pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 2$. »
Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si, et seulement si, $u_0 = 0$. »

Exercice 8 [Ca-Ra]

Après avoir déterminé leur ensemble de définition, résoudre les équations suivantes.

- 1) $e^x = 5$ 2) $\ln(x) = -2$ 3) $4x \ln(2x - 3) = 4x$ 4) $\ln(x) + \ln(5) = 0$
 5) $e^{2x-1} = 3$ 6) $e^{4-\ln(x)} = x$ 7) $(\ln x)^2 = 16$ 8) $\ln(3x - 6) = \ln(12 + x)$
 9) $1 + \ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$ 10) $-x + \ln(1 + 2e^x) = 3$ 11) $(\ln x)^4 - 10(\ln x)^2 + 9 = 0$

Exercice 9 [Ca-Ra]

Après avoir déterminé leur ensemble de définition, résoudre les inéquations suivantes.

- 1) $e^{5x} < 2$ 2) $\ln(2x) \leq \frac{1}{2} \ln(25)$ 3) $\ln(3x + 1) > 0$
 4) $\ln(2x + 3) \leq 2 \ln(6 - x)$ 5) $\ln(x + 1) + \ln(x - 2) < 2 \ln(3 - x)$ 6) $\ln(x^2 - x - 2) < 2 \ln(3 - x)$

Exercice 10 [Ra-Ca-Co]On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point M d'abscisse 1.
- Démontrer que la tangente T_u à C_f au point N d'abscisse u est parallèle à la droite d'équation $y = x$ si, et seulement si, $u^3 + 2 \ln u = 1$.
- Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x^3 + 2 \ln x$.
- En déduire que M est le seul point de C_f en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 11 [Ra-Ca-Co]

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction, ses limites, son ensemble de dérivabilité puis ses variations.

- 1) Niveau 1 :

a. $f(x) = x - x \ln(x)$

b. $g(x) = x^2 \ln(x)$

c. $h(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2$

- 2) Niveau 2 :

a. $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

b. $g(x) = \ln(\sqrt{1-x})$

c. $h(x) = \ln(x^2 + 4x + 3)$

- 3) Niveau 3 :

a. $f(x) = (e^{-x} - 1) \ln(e^{-x} - 1)$

b. $g(x) = \frac{2 \ln(x + 1)}{x + 1}$

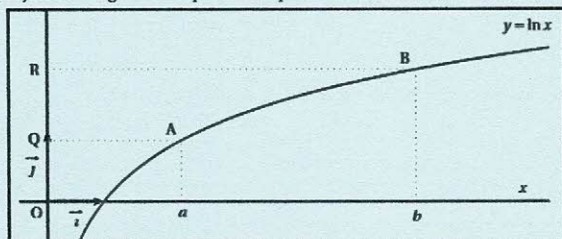
c. $h(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$

Exercice 12 [Ch-Re-Ra-Ca-Co]

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

On désigne par A et B les deux points de la courbe représentative de la fonction $\ln$ d'abscisses respectives a et b dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.



- Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe de la fonction $\ln$ au point A.
- Déterminer l'ordonnée du point P intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées.
- Calculer la longueur QP et en déduire une construction simple de T sur cette figure.
- A l'aide du résultat : « pour tout couple $(x; y)$ de réels strictement positifs on a : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ », démontrer que, pour tout réel m strictement positif, on a : $\ln(\sqrt{m}) = \frac{1}{2} \ln m$.
- Utiliser le résultat de la question précédente pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur cette figure en laissant apparentes les traces de construction.

Exercice 13 [Ch-Mo-Ra-Ca-Co]

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$.

- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.
 - En déduire que pour tout entier naturel n , $-3 < u_n \leq -1$.
 - Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
 - Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
- 2) On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3; -1]$ par : $g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x$.
- Voici le tableau de variations de la fonction g sur $]-3; -1]$:

x	-3	-2	-1
Variations de g		$g(-2)$	
	$-\infty$	↗ ↘	1

- Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g .
 - En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution α . En donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} .
- 3) Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $v_n = g(u_n)$.
- En utilisant la formule donnée à la question 1)a., démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.
 - Soit n un entier naturel. Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si, $g(u_n) = 0$.
 - Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.
 - En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.

Exercice 14 [Mo-Ra-Ca-Co]

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$. Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout n entier naturel non nul :

- A_n l'événement : « la $n^{\text{ème}}$ cible est atteinte » dont la probabilité est notée a_n ;
- $\overline{A_n}$ l'événement : « la $n^{\text{ème}}$ cible n'est pas atteinte » dont la probabilité est notée b_n .

1) Donner a_1 et b_1 .

2) En utilisant un arbre pondéré, calculer a_2 et b_2 .

3) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$.

4) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.

5) Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = a_n - \frac{2}{3}$.

- Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de u_n , puis celle de a_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que la probabilité de l'événement « la $n^{\text{ème}}$ cible est atteinte » soit supérieure ou égale à 0,666 5.

Exercice 15 [Re-Ra-Ca-Co]

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère les points A(1; 3) et B(3; 5).

On donne ci-contre C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe C_f au point A.

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

1) Lire graphiquement $f(1)$ et $f'(1)$.

2) La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.

- Déterminer l'expression de $f'(x)$.
- Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Pour la suite de l'exercice, on **admet** désormais que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$

Partie B

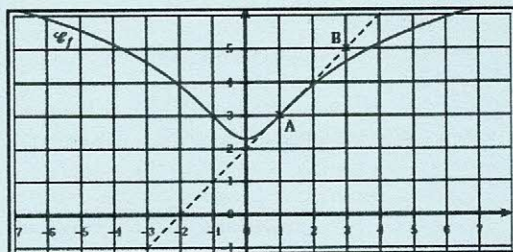
3) Étudier la parité de la fonction f . Interpréter graphiquement le résultat.

4) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau complet de variations.

6) En s'appuyant sur le tableau de variations de la fonction f , discuter, suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

7) Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln(2)$.



Partie C

- 8) Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe C_f .
- 9) Montrer que, pour tout nombre réel x , on a :

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

- 10) En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Exercice 16 [Ch-Ra-Ca-Co]

Soit k un réel strictement positif.

On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x + ke^{-x}$.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormé du plan.

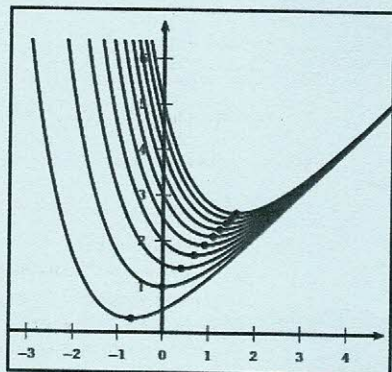
On a représenté quelques courbes C_k pour différentes valeurs de k .

Démontrer que les conjectures ① et ② suivantes sont vraies :

Conjecture ① : Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel k strictement positif, la valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe C_k .

Conjecture ② : Les points A_k sont alignés.

**Exercice 17** [Ch-Ra-Co]

On considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x$ et $g(x) = \ln(x)$.

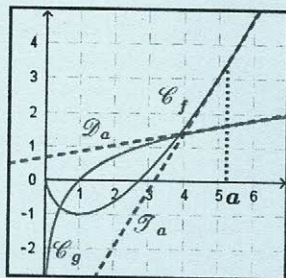
On note C_f et C_g leurs courbes respectives dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à C_f en son point d'abscisse a ;
- D_a la tangente à C_g en son point d'abscisse a .

C_f et C_g ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-contre.

Montrer qu'il existe une unique valeur de a et l'identifier pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.



Exercice 18 [Re-Ra-Ca-Co]

Soient k un réel strictement positif et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = k$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^2}{ku_n}$.

On admet que tous les termes de la suite (u_n) existent et sont strictement positifs.

- 1) Exprimer u_2, u_3 et u_4 en fonction de k .
- 2) À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes de la suite (u_n) pour deux valeurs de k .

La valeur du réel k est entrée dans la cellule D2.

- a. Quelle formule, saisie en cellule B4, permet par recopie vers le bas, de calculer tous les termes de la suite (u_n) ?
- b. Conjecturer, dans chaque cas, la limite de la suite (u_n) .

Dans la suite, on suppose que $k = e$.

A B C D				A B C D			
1	n	u_n		1	n	u_n	
2	0	1	$k = 2,7182818$	2	0	1	$k = 0,9$
3	1	2,7182818		3	1	0,9	
4	2	2,7182818		4	2	0,9	
5	3	1		5	3	1	
6	4	0.1353353		6	4	1.2345679	
7	5	0.0067379		7	5	1.6935088	
8	6	0.0001234		8	6	2.5811748	
9	7	8.315E-07		9	7	4.3712422	
10	8	2.061E-09		10	8	8.2252633	
11	9	1.88E-12		11	9	17.196982	
12	10	6.305E-16		12	10	39.949576	
13	11	7.781E-20		13	11	103.11684	

On a donc $u_0 = 1, u_1 = e$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^2}{e u_n}$.

- 3) On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_0 = 1$.
 - b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
- 4) On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (S_n) par $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $S_n = \frac{n(3-n)}{2}$.
 - b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $S_n = \ln(u_n)$.
- 5) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (u_n) .
- 6) Déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-50}$.

Exercice 19 [Ch-Re-Ra-Ca-Co]

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = bx + 2 \ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.

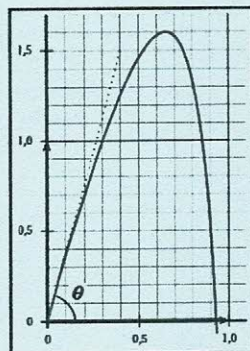
- 1) Justifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$ puis montrer que, pour tout réel $x \in [0; 1]$: $f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}$.

- 2) Montrer que la fonction f admet un maximum égal à $b - 2 + 2 \ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

- 3) Pour quelles valeurs du paramètre b , la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre ?

- 4) Dans cette question, on choisit $b = 5,69$. L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ .



Exercice 20 [Re-Ra-Ca-Co]

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel strictement positif.

Le but de cet exercice est d'étudier l'équation d'inconnue le nombre réel strictement positif x , $(E_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$.

- 1) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$ puis déterminer son maximum.

- 2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution dans l'intervalle $[1; e]$, notée α_n .

- 3) D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geq 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n) .

- a. Sont représentées graphiquement ci-contre les droites d_3, d_4 et d_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n) .

- b. Comparer, pour tout entier $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$ puis déterminer le sens de variation de la suite (α_n) .

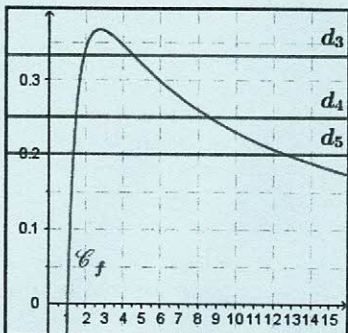
- c. En déduire que la suite (α_n) converge. (Limite non demandée).

- 4) On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que $1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n$.

On admet également que la suite (β_n) est croissante.

- a. Établir que, pour tout entier $n \geq 3$, $\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}$.

- b. En déduire la limite de la suite (β_n) .

**Exercice 21 [Ch-Mo-Re-Ra-Ca-Co]**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) On considère la fonction f définie sur $]0; 1]$ par $f(x) = x(1 - \ln(x))^2$.

- a. Montrer que, pour tout $x \in]0; 1]$, $f(x) = x - 2x \ln(x) + 4(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$.

- b. En déduire la limite de f en 0.

- c. Étudier les variations de f sur $]0; 1]$ et dresser son tableau complet de variations sur $]0; 1]$.

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur $]0; 1]$ par $g(x) = \ln(x)$.

Soit a un réel de $]0; 1]$, on note M_a le point de Γ d'abscisse a et d_a la tangente à Γ au point M_a .

Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a .

On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle $]0; 1]$.

- 2) Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne le graphique ci-contre.

- a. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unité d'aire.

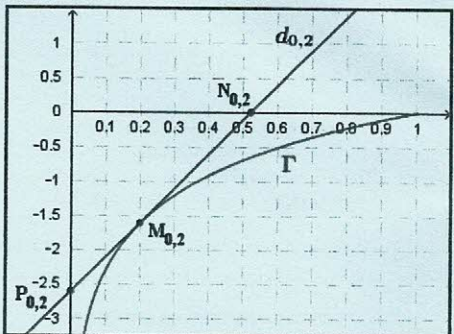
- b. Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

- c. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$.

- 3) Justifier que pour tout réel a de $]0; 1]$, l'aire du triangle ON_aP_a , en unité d'aire, est donnée par :

$$A(a) = \frac{1}{2} a(1 - \ln(a))^2$$

- 4) À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $A(a)$ est maximale et déterminer cette aire maximale.

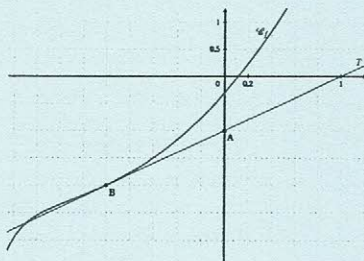


Exercice 22 [Ch-Mo-Re-Ra-Ca-Co]

On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2; +\infty[$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-contre la courbe C_f et sa tangente T au point B d'abscisse -1 .

On précise que la droite T passe par le point $A(0; -1)$.

**Partie A : exploitation du graphique**

A l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

- 1) Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
- 2) La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
- 3) Conjecturer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$.

- 1) Déterminer par le calcul la limite de f en -2 . Interpréter graphiquement ce résultat.
On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 2) Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.
- 3) Etudier les variations de f sur $]-2; +\infty[$, puis dresser son tableau de variations complet.
- 4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]-2; +\infty[$ et donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- 5) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2; +\infty[$.
- 6) Montrer que C_f admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale

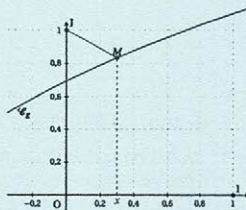
Soit g la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x + 2)$.

On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ représentée ci-contre.

Soit M un point de C_g d'abscisse x .

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $]-2; +\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



- 1) Justifier que pour tout $x > -2$, $h(x) = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2$.
- 2) On admet que h est dérivable sur $]-2; +\infty[$.
 - a. Montrer que pour tout réel $x > -2$, $h'(x) = \frac{2f(x)}{x + 2}$.
 - b. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2; +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.
 - c. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α .
- 3) On note M_α le point de C_g d'abscisse α .
 - a. Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
 - b. En déduire que la tangente à C_g au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

Exercice 23 [Ch-Mo-Re-Ra-Ca-Co]

Soit a un nombre réel supérieur à 1.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > 1$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du réel a .

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas où $1 < a < 2$

- 1) a. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.
b. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.
- 2) Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n < 2$.
 - b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier où $a = 2$

- 1) On donne ci-contre la fonction u écrite en langage Python.
Donner les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit $u(2,1)$ et $u(2,2)$.
- 2) Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$?
On admettra ce résultat sans démonstration.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n) :
        u=u**2-2*u+2
    return u
```

Partie C : étude dans le cas général

- 1) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1)$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et précisera son premier terme en fonction de a .
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + e^{2^n \times \ln(a-1)}$
- 2) Déterminer, suivant les valeurs de a supérieur à 1, la limite de la suite (u_n) .

Pour réviser**Exercice 24** [Ra-Ca-Co]

On estime que le nombre de poissons d'un lac diminue de 5 % par an.

Cette population est actuellement estimée à 50 000.

On note u_n le nombre de poissons dans le lac dans n années.

- 1) Justifier que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 2) Exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
- 3) On considère la fonction « seuil » ci-contre écrite en langage Python.
Cette fonction a pour paramètre k et renvoie le nombre d'années minimum au bout duquel le nombre de poissons dans le lac est inférieur ou égal à k .
 - a. Compléter les quatre lignes de ce programme.
 - b. Saisir ce programme et l'exécuter avec $k = 20\,000$.
 - c. Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.
 - d. Retrouver le résultat obtenu en résolvant une inéquation.

```
def seuil(k):
    1 from math import *
    2 def seuil(k):
    3     n=0
    4     u=50000
    5     while .....:
    6         n=.....
    7         u=.....
    8     return ...
```

Exercice 25 [Ra-Co]

Dans chaque cas, déterminer la limite de la fonction f en 0, puis en $+\infty$.

a. $f(x) = \ln(x) - x^2$;

b. $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

Exercice 26 [Ra-Ca-Co]

Dans chaque cas, déterminer : l'ensemble de définition de la fonction, son ensemble de dérivabilité, ses variations, ses limites.

- a. $f(x) = x \ln(x)$; b. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$; c. $f(x) = x \ln(x) - x$.
 d. $f(x) = \ln(1 + \sqrt{x})$; e. $f(x) = x \ln(1 + e^x)$ (f définie sur $\mathbb{R}^+$);

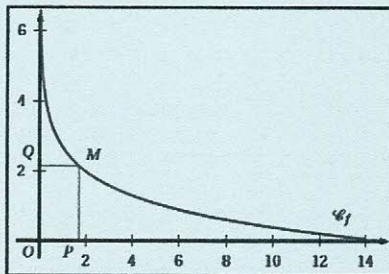
Exercice 27 [Ch-Ra-Ca-Co]

Soit f la fonction définie sur $]0; 14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative C_f de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-contre.

À tout point M appartenant à C_f , on associe :

- le point P , projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses;
 - le point Q , projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.
- 1) L'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur C_f ?
 - 2) Existe-t-il un point M de C_f tel que l'aire du rectangle $OPMQ$ soit maximale? Si oui, déterminer ses coordonnées.

**Exercice 28** [Re-Ra-Ca-Co]**Partie A : Étude d'une fonction**

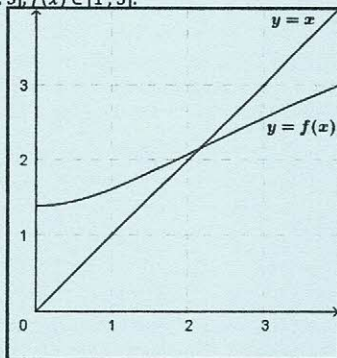
On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2 + 4)$.

- 1) Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$ et justifier que, pour tout réel $x \in [1; 3]$, $f(x) \in [1; 3]$.
- 2) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
 - a. Étudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.
 - b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; 3]$ et en donner une valeur approchée au dixième près.
 - c. Justifier que le réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1; 3]$.

Partie B : Étude d'une suite

Dans cette partie, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 3) Construire, dans le repère orthonormé ci-contre, les trois premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses, sans calcul et en laissant apparents les traits de construction. Placer également l'abscisse α .
- 4) Que peut-on conjecturer concernant la suite (u_n) ?
(Variations, minorant, majorant, limite éventuelle).
- 5) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
- 6) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

**Exercices dans le manuel :**

- Etudes de fonction avec " $\ln(x)$ " : 69 et 70 page 187
- Etude d'une fonction du type $\ln u$: 74 et 77 page 188
- Avec une fonction auxiliaire : 94 page 192 et 107 page 195
- Fonctions et suites : 80 page 189
- QCM page 194

Pour aller plus loin

Exercice 27 [Ra-Ca-Co] ALGORITHME DE BRIGGS

En 1624, le mathématicien anglais Henry Briggs, dans « *Arithmetica Logarithmica* » calcule à la main le logarithme décimal de 30 000 entiers (de 1 à 20 000 et de 90 001 à 100 000) avec 14 décimales. L'objectif de cet exercice est de mettre en place un algorithme utilisant les procédés de calcul de Briggs.

On rappelle que pour tout $x \in]0; +\infty[$ $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Partie A : algorithme de Briggs expliqué par Euler

En 1648, Euler, dans « *Introduction à l'analyse infinitésimale* » explique la méthode de Briggs pour calculer une valeur approchée de $\log(5)$. Voici ses calculs.

La colonne de gauche est initialisée par $A = 1$ et $B = 10$.

La colonne de droite est initialisée par $IA = \log(1) = 0$ et $IB = \log(10) = 1$.

La méthode de Briggs s'appuie sur la relation que l'on écrit de nos jours :

$$\log(\sqrt{AB}) = \frac{1}{2}(\log(A) + \log(B)).$$

Dans la colonne de gauche, $C = \sqrt{AB}$ et dans la colonne de droite, $IC = \frac{1}{2}(IA + IB)$.

- Vérifier les valeurs de C et IC.
- On donne ci-contre l'algorithme de Briggs pour calculer $\log(x)$ où x désigne un nombre entier naturel tel que $1 < x < 10$. On initialise l'algorithme avec les valeurs de A, B, IA et IB indiquées ci-dessus et il donne IB en sortie. Recopier et compléter le tableau en exécutant l'algorithme pas à pas avec $x = 5$. Utiliser la calculatrice et vérifier les valeurs de D et E obtenues par Euler.

A	B	IA	IB	$\sqrt{AB}$	$ B - 5 > 10^{-5}$
1	10	0	1	3,162 277	Faux

A =	1,000000;	IA =	0,000000;
B =	10,000000;	IB =	1,000000;
C =	3,162277;	IC =	0,500000;
D =	5,623413;	ID =	0,750000;
E =	4,216964;	IE =	0,615000;
F =	4,869674;	IF =	0,687500;
G =	5,331991;	IG =	0,718750;
H =	5,048065;	IH =	0,703125;
I =	4,918069;	II =	0,699219;
K =	5,002861;	IK =	0,699512;
L =	4,980416;	IL =	0,697816;
M =	4,991617;	IM =	0,698121;
N =	4,997141;	IN =	0,698314;
O =	5,000015;	IO =	0,698474;
P =	4,998647;	IP =	0,698511;
Q =	4,999359;	IQ =	0,698513;
R =	4,999701;	IR =	0,698544;
S =	4,999876;	IS =	0,698592;
T =	4,999963;	IT =	0,698668;
U =	5,000008;	IU =	0,698707;
V =	4,999984;	IV =	0,698671;
X =	4,999977;	IX =	0,698697;
Y =	5,000001;	IY =	0,698708;
Z =	5,000000;	IZ =	0,698700;

Tant que $|B - x| > 10^{-5}$
 Si $\sqrt{AB} \leq x$ alors
 $A \leftarrow \sqrt{AB}$
 $IA \leftarrow \frac{IA + IB}{2}$
 sinon
 $B \leftarrow \sqrt{AB}$
 $IB \leftarrow \frac{IA + IB}{2}$
 Fin si
 Fin Tant que

Partie B : une fonction en langage Python

On a traduit cet algorithme par une fonction « briggs », de paramètres x et p , écrite en langage Python où p est l'entier naturel non nul de la condition $|B - x| > 10^{-p}$.

- Compléter la fonction « briggs » ci-contre.
- Saisir ce programme sur la calculatrice, exécuter briggs(5,7), puis comparer le résultat avec la valeur de IZ obtenue par Euler.
- Utiliser ce programme pour déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de $\log(62)$.
Pour cela, initialiser avec $A = 10$, $B = 100$, $IA = 1$ et $IB = 2$.

```
def briggs(x,p):
    A=...
    B=...
    IA=...
    IB=...
    while ...:
        if ...:
            ...
        else:
            ...
    return ...
```